Exercice 7 On considère un dé à 6 faces équiprobables. Un joueur a le choix de lancer ce dé 1, 2 ou 3 fois, il obtient alors pour gain la valeur du dernier lancé effectué.

En supposant les 3 tirages indépendants, l'objectif de cet exercice est déterminer la stratégie optimale en moyenne de ce joueur.

1. Calculer l'espérance du gain si l'on effectue un seul tirage.

   ▶ **Corrigé:**
   Le dé étant suposé équilibré, cette espérance vaut
   $$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2} = 3,5.$$
   ◀

2. Si le joueur doit choisir un nombre de tirages fixe (déterministe), *avant le début du jeu*, a t'il intérêt à choisir entre jouer 1, 2 ou 3 fois ?

   ▶ **Corrigé:**
   L'espérance du gain reste la même, égale à $3,5$, que l'on joue 1, 2 ou 3 fois. Il n'y a pas de bonne raison de choisir un nombre tirage particulier. ◀

3. Quel est le gain optimal moyen du joueur, s'il connait les résultats des 3 tirages (le gain est alors le maximum des 3 tirages indépendants) ?

   ▶ **Corrigé:**
   On considère 3 variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes uniforme à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$ et l'on veut calculer $\mathbb{E}(M)$ où $M = \max(X_1, X_2, X_3)$.
   Il est facile de calculer la loi de M puisque, pour tout l entier, on a
   $$\mathbb{P}(M \leq l) = \mathbb{P}(X_1 \leq l)\mathbb{P}(X_2 \leq l)\mathbb{P}(X_3 \leq l) = \mathbb{P}(X_1 \leq l)^3.$$
   On en déduit que $\mathbb{P}(M = l) = \mathbb{P}(X_1 \leq l)^3 - \mathbb{P}(X_1 \leq l-1)^3$. Comme $\mathbb{P}(X_1 \leq l) = l/6$ pour $1 \leq l \leq 6$, on obtient
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=1) = \frac{1}{216}, \mathbb{P}(M=2) = \frac{7}{216}, \mathbb{P}(M=3) = \frac{19}{216},\\ \mathbb{P}(M=4) = \frac{37}{216}, \mathbb{P}(M=5) = \frac{61}{216}, \mathbb{P}(M=6) = \frac{91}{216}.\end{aligned}$$
   Il est alors facile de calculer la moyenne de M
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) &= \frac{1}{216}(1\times 1 + 2\times 7 + 3\times 19 + 4\times 37 + 5\times 61 + 6\times 91)\\ &= \frac{1071}{216} \approx 4,959333\ldots\end{aligned}$$
   Cette moyenne est (bien sûr) plus grande que la moyenne pour 1 tirage. ◀

On suppose maintenant que le joueur peut tenir compte des tirages déjà effectués.

4. Montrer que la stratégie optimale (en moyenne), si l'on se restreint à 2 tirages maximum, est la suivante : si le premier tirage vaut 4, 5 ou 6 s'arrêter, sinon rejouer. Calculer la moyenne du gain de cette stratégie optimale.

   ▶ **Corrigé:**
   Après le premier tirage, on n'a intérêt à rejouer que si la moyenne du tirage suivant (i.e. $3,5$) est plus grande que ce premier tirage : on ne rejoue que si le premier tirage est 1, 2 ou 3.

La moyenne du gain de cette stratégie à deux étape vaut

$$\frac{1}{6}(4+5+6)+\frac{3}{6}\times\frac{7}{2}=\frac{51}{12}=4,25.$$

Elle sensiblement supérieure à celle obtenu pour 1 seul tirage. ◀

5. En utilisant la question précédente identifier la stratégie optimale lorsque l'on joue 3 fois. Calculer la moyenne du gain de cette stratégie optimale.

   ▶ **Corrigé:**
   On sait (question précédente) que l'on peut gagner en moyenne $4,25$ en deux coups. Donc si le premier tirage vaut 5 ou 6 on va s'arrêter et sinon on rejoue avec la stratégie optimale à 2 tirages de la question précédente.
   Cette stratégie a pour gain moyen

$$\frac{1}{6}(5+6)+\frac{4}{6}\times\frac{51}{12}=\frac{168}{36}\approx 4,666\ldots$$

   Un gain moyen meilleur qu'avec 2 tirages (bien sûr) mais moins bon que l'espérance du maximum des 3 tirages (bien sûr !). ◀

Exercice 8 On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$, sur un espace fini E, de matrice de transition P, issue d'un point $x_0 \in E$ (i.e. $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1$).

On cherche $(u(n,x), n = 0,\ldots,N, x \in E)$ une solution à l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} u(n,x) = \max\left\{\sum_{y\in E} P(x,y)u(n+1,y), f(n,x)\right\}, n < N, x \in E \\ u(N,x) = f(N,x), x \in E. \end{array}\right. \tag{1}$$

Montrer qu'il existe une solution à cette équation (1) et que cette solution est unique.

▶ **Corrigé:**
On peut le montrer par une récurrence descendante sur $u(n,.)$. C'est clair pour $n = N$ et si c'est vrai pour $n+1$ l'équation (1) donne une formule explicite de $u(n,.)$ en fonction de $u(n+1,.)$. ◀

Exercice 9 Avec les notation de l'exercice précèdent, on note u la solution unique de (1).

1. Montrer que pour tout temps d'arrêt τ, et pour tout n, il existe, un ensemble $\bar{A}_n \subset E^{n+1}$ tel que

$$\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}^c = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}.$$

   où $X_{0:n} = (X_0, \ldots, X_n)$.

   ▶ **Corrigé:**
   Par définition d'un temps d'arrêt, il existe un sous ensemble $A_n \subset E^{n+1}$, tel que l'évènement $\{\tau \leq n\} = \{X_{0:n} \in A_n\}$. Il suffit alors de poser $\bar{A}_n = A_n^c$ et l'on a $\{\tau \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in \bar{A}_n\}$. ◀

2. Montrer que, quel que soit le temps d'arrêt τ plus petit que N, $\mathbb{E}\left(u\left(n\wedge\tau, X_{n\wedge\tau}\right)\right)$ est décroissant en n pour $0 \leq n \leq N$ (s'aider des transparents du cours au besoin).

   ▶ **Corrigé:**
   Voir les transparents p.18 et p.19 du cours. ◀

3. En déduire que pour tout temps d'arrêt τ plus petit que N, $u(0,x_0) \geq \mathbb{E}\left(f\left(\tau, X_\tau\right)\right)$.

▶ **Corrigé:**
Voir le transparent p.18 du cours. ◀

4. On note $\tau_0 = \inf\{n \geq 0, u(n, X_n) = f(n, X_n)\}$. Montrer que τ_0 est un temps d'arrêt plus petit que N.

   ▶ **Corrigé:**
   Par définition de τ_0, on a :

   $$\{\tau_0 \geq n+1\} = \{u(0, X_0) \neq f(0, X_0), u(1, X_1) \neq f(1, X_1), \ldots, u(n, X_n) \neq f(n, X_n)\}.$$

   Le sous ensemble $B_n = \{x \in E^{n+1}, u(0, x_0) \neq f(0, x_0), u(1, x_1) \neq f(1, x_1), \ldots, u(n, x_n) \neq f(n, x_n)\}$ de E^{n+1} est tel que $\{\tau_0 \geq n+1\} = \{X_{0:n} \in B_n\}$.
   D'où $\{\tau_0 \leq n\} = \{X_{0:n} \in B_n^c\}$. Ce qui prouve que τ_0 est un temps d'arrêt. ◀

5. Montrer que $\mathbb{E}\left(u\left(n \wedge \tau_0, X_{n \wedge \tau_0}\right)\right)$ ne dépend pas de n, pour $0 \leq n \leq N$ (s'aider des transparents du cours au besoin).

   ▶ **Corrigé:**
   Voir le transparent p.21 du cours.
   Le point important à comprendre est que sur l'événement $\{\tau_0 \geq n+1\}$, on a $u(n, X_n) \neq f(n, X_n)$ et comme u solution de (1), on a forcément

   $$\sum_{x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) P(X_n, x_{n+1}) = u(n, X_n).$$

   ◀

6. En déduire que $u(0, x_0) = \mathbb{E}\left(f\left(\tau_0, X_{\tau_0}\right)\right) = \sup_{0 \leq \tau \leq N, \text{t.a.}} \mathbb{E}\left(f\left(\tau, X_\tau\right)\right)$.

   ▶ **Corrigé:**
   Voir le transparent p.20 du cours. ◀

Exercice 10 On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur l'espace d'état $\{1, 2\}$ de matrice de transition P $(0 < p < 1)$

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

issue de 1 à l'instant 0 (i.e. $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$).

1. Montrer que, si $n \geq 1$, la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - p$.

   ▶ **Corrigé:**
   On le vérifie par récurrence.
   C'est vrai pour $n = 1$, puisque $\mathbb{P}(X_n = 1) = P(1, 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 2) = P(1, 2) = 1 - p$.
   D'autre part, si c'est vrai pour n on a

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= p \times p + p \times (1-p) = p. \end{aligned}$$

   De même on obtient $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = 1 - p$. ◀

2. En déduire que $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi.

▶ **Corrigé:**
De la définition d'un chaîne de Markov, on déduit que

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(1, x_1)P(x_1, x_2)\ldots P(x_{n-1}, x_n).$$

Comme dans notre cas $P(x, y)$ ne dépendent pas de x, et que $\mathbb{P}(X_n = x_n) = P(1, x_n)$ (i.e. p pour $x_n = 1$ et $1 - p$ pour $x_n = 2$), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) &= P(1, x_1)P(1, x_2)\ldots P(1, x_n)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)\ldots\mathbb{P}(X_n = x_n).\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'indépendance du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. ◀

3. On s'intéresse au problème d'arrêt optimal pour cette chaîne de Markov avec comme gain à l'instant n, $f(n, x) = \rho^n \mathbf{1}_{\{x=1\}}$. On suppose que $\rho > 0$ et $p\rho > 1$. Montrer que la solution u de l'équation (1) est donnée, pour $n < N$, par $u(n, 1 \text{ ou } 2) = p\rho^N$ et pour $n = N$ par $u(N, x) = \rho^N \mathbf{1}_{\{x=1\}}$.

   ▶ **Corrigé:**
   Par définition, on a $u(N, x) = \rho^N \mathbf{1}_{\{x=1\}}$.
   Calculons $u(N-1, 1)$ c'est le max de $f(N-1, 1) = \rho^{N-1}$ et de $p \times \rho^N + (1-p) \times 0 = p\rho^N$.
   Comme $p\rho$ est supposé strictement plus grand que 1, $u(N-1, 1) = p\rho^N$.
   Pour $u(N-1, 2)$, on obtient

$$u(N-1, 2) = \max\left(0, p \times \rho^N + (1-p) \times 0\right) = p\rho^N.$$

   Il reste à vérifier par récurrence descendante que $u(n, .) = p\rho^N$. On remarque pour cela que $p\rho^N \geq \rho^n$ (en effet $p\rho > 1$ et donc $\rho > 1$, ceci permet d'affirmer que

$$u(n, 1) = \max\left(p \times p\rho^N + (1-p) \times p\rho^N, \rho^n\right) = max\left(p\rho^N, \rho^n\right) = p\rho^N.$$

   Et l'on a de façon évidente que

$$u(n, 2) = max\left(p\rho^N, 0\right) = p\rho^N.$$

   ◀

4. En déduire que le temps d'arrêt τ_{opt} optimal (unique dans ce cas) est donné par $\tau_{opt} = N$. Comment interpréter ce résultat ?

   ▶ **Corrigé:**
   Le temps d'arrêt τ_{opt} vaut

$$\tau_{opt} = \inf\{n \geq 0, u(n, X_n) = f(n, X_n)\}.$$

   Or, pour $n < N$, $u(n, X_n) > f(n, X_n)$ et par définition de u, $u(N, x) = f(N, x)$. On en déduit que $\tau_{opt} = N$.
   On n'a jamais intérêt à arrêter le jeu avant N, il faut continuer à jouer jusqu'à N. Ceci s'explique par le choix fait pour les paramêtres p et ρ ($p\rho > 1$). ◀

5. On pose $\bar{\tau}_{opt} = \sup\{n \geq 0, X_n = 1\}$. Vérifier que $\bar{\tau}_{opt}$ est l'unique temps aléatoire tel que

$$f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}}) = \arg\max\{0 \leq n \leq N, f(n, X_n)\}.$$

▶ **Corrigé:**

Ici $f(n, X_n) = \rho^n \mathbf{1}_{\{X_n=1\}}$*. Donc, comme* $\rho > 1$, $\arg\max \left\{0 \leq n \leq N, \rho^n \mathbf{1}_{\{X_n=1\}}\right\}$ *est atteint par le plus petit* n *tel que* $X_n = 1$ *(et c'est le seul maximiseur).*

Bien noter que $\bar{\tau}_{opt}$ *n'est pas un temps d'arrêt. Ce qui est prouvé à la question suivante.* ◀

6. Vérifier que $\mathbb{E}\left(f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}})\right) > \mathbb{E}\left(f(\tau_{opt}, X_{\tau_{opt}})\right)$. $\bar{\tau}_{opt}$ peut-il être un temps d'arrêt ?

▶ **Corrigé:**

On a, par définition de $\bar{\tau}_{opt}$ $f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}}) \geq f(\tau_{opt}, X_{\tau_{opt}})$*. De plus*

$$\mathbb{P}\left(f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}}) > f(\tau_{opt}, X_{\tau_{opt}})\right) \geq \mathbb{P}\left(\bar{\tau}_{opt} < N\right) > 0$$

On a donc $\mathbb{E}\left(f(\bar{\tau}_{opt}, X_{\bar{\tau}_{opt}})\right) > \mathbb{E}\left(f(\tau_{opt}, X_{\tau_{opt}})\right)$.

Or l'on sait que pour tout temps d'arrêt τ $\mathbb{E}\left(f(\tau, X_\tau)\right) \leq \mathbb{E}\left(f(\tau_{opt}, X_{\tau_{opt}})\right)$. $\bar{\tau}_{opt}$ *ne peut donc pas être un temps d'arrêt.* ◀